Des objets, en nombre illimité sont placés successivement dans des cases, en nombre fini N, dont la capacité est illimitée. On suppose que ces cases sont vides au départ et qu'à chaque fois qu'un objet est placé, la probabilité pour qu'il le soit dans une case donnée est $\frac{1}{N}$.

Dans une partie préliminaire on établira quelques égalités utiles pour la suite.

Dans la première partie on étudiera deux variables aléatoires dans le cas particulier où $N = 3$.

Dans la deuxième partie, on étudiera une troisième variable aléatoire relative au cas où N est quelconque (supérieur ou égal à 2) et où l'on place un nombre fini n d'objets.

On considère les deux séries entières

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \qquad S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

1° Pour quelles valeurs de x convergent-elles?

2° Calculer la somme de chacune d'elles. Celles-ci s'expriment sous forme de fonctions rationnelles qu'on obtiendra soit en multipliant les séries par le polynôme $1-x$, soit en utilisant la dérivation et l'intégration des séries entières, soit par tout autre procédé.

I

On suppose $N = 3$.

On effectue les placements successifs dans les conditions indiquées ci-dessus.

Soit Y le nombre d'objets placés lorsque, pour la première fois, deux cases exactement sont occupées par au moins un objet.

Soit Z le nombre d'objets placés lorsque, pour la première fois, les trois cases contiennent, chacune, au moins un objet.

Y et Z sont deux variables aléatoires.

1° Calculer, pour tout entier k naturel ($k \in \mathbb{N}^*$), le nombre Prob $(Y = k)$.

2° l et k étant deux entiers naturels, calculer la probabilité conditionnelle de l'événement $(Z = l)$ sachant que $(Y = k)$: Prob $(Z = l / Y = k)$.

3° En déduire que l'on a : pour $l \geqslant 3$,

$$\text{Prob}\,(Z = l) = \left(\frac{2}{3}\right)^{l-1} - \frac{2}{3^{l-1}},$$

et, pour $l \leqslant 2$, Prob $(Z = l) = 0$.

4° En déduire E (Z), E (Z^2) et Var (Z).

II

On suppose maintenant $N \geqslant 2$ et on désigne par n un entier supérieur ou égal à 1.

On désigne par X_n la variable aléatoire égale au nombre de cases qui contiennent au moins un objet lorsque n objets ont été placés. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$, on pose $p(n, k) = \text{Prob}\,(X_n = k)$.

1° Que dire de $p(n, k)$ pour $k > n$, pour $k > N$, pour $k = 0$?

2° Calculer $p(n, 1)$ et $p(n, n)$.

3° Démontrer la relation

$$p(n+1, k) = \frac{k}{N} p(n, k) + \frac{N-k+1}{N} p(n, k-1) \quad (\text{pour } k \geqslant 1)$$

En déduire le tableau des $p(n, k)$ pour $n \leqslant 3$.

4° On introduit, pour tout entier naturel n non nul le polynôme P_n à une variable X, défini par

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{N} p(n, k) X^k.$$

Démontrer la relation

$$P_{n+1}(X) = \frac{1}{N}(X - X^2) P'_n(X) + X P_n(X).$$

Calculer les polynômes P_1, P_2, P_3, P_4, et les nombres $P'_n(1)$ pour $n \leqslant 4$.

5° Calculer $P_n(1)$. Que représente $P'_n(1)$ pour la variable aléatoire X_n?

6° Trouver une relation simple entre $P'_{n+1}(1)$ et $P'_n(1)$. En déduire que $P'_n(1)$ peut s'écrire $A + B\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$ où A et B ne dépendent que de N. Calculer E (X_n) en fonction de N et n.

7° Dans le cas où $n = N$, calculer $\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} E(X_N)$.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail